RINGE UND WÖRTER

JENS-D. DOLL

Zusammenfassung. Vortrag im Seminar von Dr. Ralf Holtkamp über algebraische Strukturen im SoSe 2009.

Inhaltsverzeichnis

1. Struktur nichtkommutativer Ringe

1.1. Zerlegung von Ringen.

Theorem 1. *Sei R ein Ring und $\mathbb{M}_n(R)$ der Matrizenring über R. Dann gilt* [Lam91, p32, Theorem 3.1]*:*

$$\begin{array}{ll} \forall \text{ Ideale } I \epsilon \mathbb{M}_n(R): & \exists \text{ Ideal } A \text{ aus } R \text{ mit } I = \mathbb{M}_n(A) \\ \forall \text{einfachen } R: & \mathbb{M}_n(R) \text{ ist einfach} \end{array}$$

Beweis. Skizze: a) Sei M=($\mathrm{m_{ij}}$) eine Matrix, dann läßt sich jedes M als Summe von Einheitsmatrizen schreiben als $\mathrm{E_{ij}}$M $\mathrm{E_{kl}}$ =$\mathrm{m_{jk}}E_{\mathrm{il}}$ und man induziert mit i=l=1 ..., woraus I $\subseteq\mathrm{M_n}$(A) folgt. b) Nun nehme man irgendein $\mathrm{a_{ij}}\epsilon\mathrm{M_n}$(A) und man zeige $\mathrm{a_{jl}}E_{\mathrm{il}}\epsilon$ I für alle i,l ☐

Definition 2. Ein R-Modul heißt noethersch [Lam91, p20], wenn jedes Ideal endlich generiert ist (ACC/DCC). Es heißt artinsch [Lan02, p439], wenn die Untermodule eine endliche erzeugende Folge bilden.

Theorem 3. *Sei D ein Schiefkörper und R = $\mathbb{M}_n$(D). Dann gilt* [Lam91, p33, Theorem 3.3] *:*

R ist einfach, links halbeinfach, links noethersch bzw. links artinsch
R hat ein eindeutiges links einfaches Modul V
  es gibt keine Annihilatoren in V
  $_\mathrm{R}$R als R-Modul ist isomorph zu n · V
die Endomorphismenringe End($_\mathrm{r}$V), betrachtet als Ring
von rechts-Operatoren, sind isomorph zu D

Date: 4. Juli 2009.

Beweis. Skizze. Aus Theorem 3.1 folgt, daß R ein einfacher Ring ist. Daraus folgt dann die ACC und DCC-Eigenschaft. Der Ring R=$\mathbb{M}_n$(D) kann als Multiplikationsring von Matrizen aufgefaßt werden und als End(V_D)identifiziert werden. Daher hat er keine Annihilatoren. ... siehe Buch, sehr langer Beweis ... □

Theorem 4. *Seien R_1, ..., R_n linkshalbeinfache Ringe.* [Lam91, p35, Theorem 3.4] *Dann ist ihr direktes Produkt R= R_1 x ... x R_n ein linkshalbeinfacher Ring.*

Beweis. Skizze. Sei R eine direkte Summe R=A_{i1}x ... x A_{im}mit minimalen Linksidealen von R_i. Nun folgt, daß A_{ij}auch ein minimales Linksideal von R ist. Also kann aus $_R$R = R_1 ⊕ ... ⊕ R_r= $_{ij}$⊕A_{ij}geschlossen werden, daß R links halbeinfach ist. □

Theorem 5. *Schurs Lemma. Sei R irgendein Ring und $_R V$ ein einfaches linkes R-Modul* [Lam91, p35, Theorem 3.6]. *Dann ist der Endomorphismenring End($_R V$) ein Schiefkörper.*

Beweis. Für jedes f≠ 0 ist img(f) ≠0 und ker(f) ≠ V. Weil aber beide Untermodule von V sind, folgt daß img(f) = V und ker(f) = 0 ist, also f invertierbar in End($_n$V) ist. □

1.2. **Satz von Wedderburn-Artin.**

Theorem 6. *Sei R ein halbeinfacher Ring und R ≅ $\mathbb{M}_{n1}(D_1)$ x ... x $\mathbb{M}_{nr}(D_r)$ mit geeigneten Schiefkörpern D_1, .. D_r und Matrizen $\mathbb{M}_{ni}$ über D_i. Dann ist die Zahl r ist eindeutig bestimmt und ebenso bis auf Permutation die Paare (n1, D1) ... (nr,Dr). Es gibt genau r wechselseitig nichtisomorphe linkseinfache Module über R.*[Lam91, p35, Theorem 3.5]

Beweis. Skizze. Man zerlege R in eine endliche direkte Summe von Linksidealen und gruppiere sie zu

(A) $_R$R≅ n_1V_1⊕ ... ⊕ n_rV_r.

Nun folgt ... daß V_1 ... V_r wechselseitig nicht isomorphe linke R-Module sind. Nun berechne man die R-Endomorphismenringe der linken und der rechten Seite von (A). Sie sind

End(n_1V_1⊕ ... ⊕n_rV_r) ≅ End(n_1V_1) x ... x End(n_rV_r.) ≅ $M_{n1}(D_1)$ x ... x $M_{nr}(D_r)$,

weshalb man einen Ringisomorphismus R ≅ $M_{n1'}(D_1')$ x ... x $M_{ns'}(D_s')$ hat. ... Weiterhin folgt, daß

(A') $_R$R≅n_1'V_1' ⊕ ... ⊕ n_s' V_s'

ist. Nun folgt ..., daß

D_i' ≅End $_{Ri}$(V_i') ≅End $_R$(V_i') ≅ End $_R$(V_i) = D_i

für alle i. □

2. Repräsentationen im freien Monoid

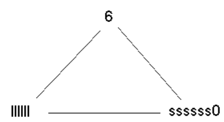
Ein grundsätzliches Dilemma der Repräsentationen besteht darin, daß Mehrdeutigkeit vorliegt, d.h. zu einem Element gibt es immer mehrere syntaktische oder visuelle Repräsentationen. Die (eindeutige) Repräsentation einer Gruppe ist laut Emmy Noether [Lam91, p82] ein Vektorraum über dem zugehörigen Gruppenring.

2.1. **Zahlen.**

Gegeben seien die Alphabete A_1={I,-,/}, A_2={0..9,-,/} und A_3={s,p,0,/}, Die folgenden Darstellungen sind jeweils gleichbedeutend:

$a \epsilon \mathbb{N}$:	I, II, IIIIII	
	1, 2, 6	
	s0, ss0, ssssss0	successor
$a \epsilon \mathbb{Z}$:	-IIIII, -I	
	-5, -1	
	ppppp0, p0	predecessor
$a \epsilon \mathbb{Q}$:	I/II, I/III, -II/III	
	1/2, 1/3, -2/3	
	s0/ss0, s0/ss0, pp0/sss0	

2.2. **Eindeutigkeit.** Es gibt keine ausgezeichnete Repräsentation. Die Deutung/Interpretation von Zeichen [CB00, p30] hängt vom Betrachter und dessen Wissen ab. Somit sind die Darstellungen aus 2.1



für Mathematiker vertauschbar und haben obendrein viele weitere Varianten (e.g. X'06', 110, ...).

3. Mengen von Wörtern

Definition 7. Eine Ordnung eines Ringes ist eine transitive Relation "$<$" mit [Lam91, p276, §17]

$$\forall a,b,c\ \epsilon R \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$$
$$0 < a,\ o < b \Rightarrow 0 < a \cdot b$$

3.1. **Kleene-Algebra über Wörtern.**

Definition 8. Es sei

1	$=$	das leere Wort
0	$=$	die leere Menge
$\cup$	$=$	die Mengenvereinigung
$\cdot$	$=$	die Katenation

Definition 9. Gegeben seien folgende Axiome im freien Monoid [Des08, p54] bzw. [Kle52]:

$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$	(a1)	$0 \cdot x = 0$	(a6)
$x \cup y = y \cup x$	(a2)	$1 \cdot x = x$	(a7)
$x \cup x = x$	(a3)	$x \cdot (y \cup z) = x \cdot y \cup x \cdot z$	(a8)
$0 \cup x = x$	(a4)	$(x \cup y) \cdot z = x \cdot z \cup y \cdot z$	(a9)
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	(a5)	$x^* = x^* \cdot x \cup 1$	(a10)

Claim 10. Mit dieser Definition bildet die Kleene-Algebra einen Semiring.

Beweis. Das + definiert die mengenmäßige Verknüpfung, welche eine Halbgruppe bildet. Das $\cdot$ definiert die Katenation, welche ein Monoid erzeugt □

3.2. **L1 und L2 für Halbgruppe und Schiefkörper.**

Claim 11. Die Sprache L_1={s ∪ s*} über dem Alphabet T={s} ist isomorph zu den natürlichen Zahlen ℕ.

Beweis. Man definiere bezüglich der Katenation · einen Homomorphismus φ: T* → ℕ.
φ(s) =1
φ(v·w) =φ(v) +φ(w) □

Claim 12. Für das Alphabet T={0, 1, x} erzeugt die Sprache
L_2={{0 ∪ 1}(x{0 ∪ 1})*}
einen Ring, der zum Schiefkörper der Dualzahlen isomorph ist.

Beweis. L_2={0 ∪ 1} ∪{0 ∪ 1}x{0 ∪ 1} ∪ ... □

Literatur

[CB00] Christoph Beierle, GabrieIe Isberner-Kerner: *Methoden wissensbasierter Systeme.* 2000
[Des08] Desharnais, Jean Lou C.: Latest News about Demonic Algebra with Domain. In: *LNCS 4398, RelMiCS/AKA* (2008), S. p54
[Kle52] Kleene, Stephen C.: *Introduction to Metamathematics.* North-Holland, 1952. – pp 288–295 S.
[Lam91] Lam, Tsit Y.: *A First Course in Noncommutative Rings.* 1991
[Lan02] Lang, Serge: *Algebra.* Springer, 2002